edhec **MATHEMATIQUES OPTION ECONOMIQUE**

MERCREDI 11 MAI 1994, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées :

- Règles graduées
- Calculatrices de poche, programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long X 15 cm de large.

L'épreuve comporte 3 exercices et 1 problème.

Exercice 1

1. Montrer que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -19 & 6 & 9 \\ -30 & 11 & 15 \\ -22 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ et préciser les valeurs propres associées.

2. En déduire que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible et déterminer la matrice $B = P^{-1}AP$.

3. Calculer, pour tout entier naturel n, les matrices B^n et A^n.

4. On dit qu'une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices carrées d'ordre trois a une limite quand n tend vers l'infini si et seulement si chaque coefficient $m_{i,j}(n)$ de M_n a une limite $m_{i,j}$ quand n tend vers l'infini et la limite M de la suite est alors la matrice de coefficients $m_{i,j}$.
   Calculer $Q = \lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{2}A)^n$.

5. Justifier sans calcul l'égalité : $AQ = 2Q$.

Exercice 2

1. Soient p un entier naturel, P une fonction polynôme à coefficients réels, de degré p et Q la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = (x^2+1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x).$$

   (a) Montrer que, si $p \neq 2$, le degré de Q est égal à p et que, si $p = 2$, le degré de Q est strictement inférieur à p.

   (b) En déduire que Q n'est jamais de degré deux.

2. (a) Montrer que, si P est une fonction polynôme non nulle telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2+1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x) = 0 \qquad (1)$$

alors P est de degré deux.

(b) Trouver toutes les fonctions polynômes P solutions de l'équation (1).

3. On cherche toutes les fonctions polynômes P solutions de l'équation:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2+1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x) = x \qquad (2)$$

(a) Trouver une solution P_1 de degré un de l'équation (2).

(b) Montrer qu'une fonction polynôme P est solution de l'équation (2) si et seulement si $P - P_1$ est solution de l'équation (1).

(c) En déduire les fonctions polynômes solutions de l'équation (2).

Exercice 3

Soit n un entier strictement positif et soient i et j des entiers tels que $1 \leq i < j \leq n$. On dit que la permutation f de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ des entiers naturels compris entre 1 et n, transpose la paire $\{i,j\}$ si et seulement si $f(i) = j$ et $f(j) = i$.
Pour tout entier naturel p, on note $[\frac{p}{2}]$ la partie entière de $\frac{p}{2}$.
Soit s_n le nombre des permutations de $[\![1,n]\!]$ ne transposant aucune paire. En particulier $s_1 = 1$ et, par convention, $s_0 = 1$.

1. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \frac{s_n}{n!}$. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.

2. (a) Pour $n \geq 2$, exprimer en fonction de s_{n-2} le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ transposant une seule paire.

(b) Montrer qu'il existe des permutations de $[\![1,n]\!]$ transposant exactement k paires si et seulement si $0 \leq k \leq [\frac{n}{2}]$.

(c) Montrer que le nombre de ces permutations est alors

$$C_n^{2k}.(2k-1).(2k-3).\ldots.3.1.s_{n-2k}.$$

3. (a) Exprimer s_n en fonction des s_j pour $0 \leq j < n$.

(b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{u_{n-2k}}{2^k\,(k!)} \qquad (*)$$

4. (a) Démontrer par récurrence à l'aide de $(*)$ que, pour tout entier naturel p, $u_{2p+1} = u_{2p}$.

(b) Pour tout entier naturel p, on pose $v_p = 2^p\,u_{2p}$. Calculer v_p en fonction des v_j pour $0 \leq j < p$.

(c) Calculer $v_0, \ldots, v_4$, puis $u_0, \ldots, u_9$ et enfin $s_0, \ldots, s_9$.

5. (a) Démontrer que pour tout $p \geq 1$, $u_{2p} - u_{2p-2} = \frac{(-1)^p}{2^p\,(p!)}$.

(b) En déduire que les suites $(u_{4p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(u_{4p+2})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite l appartenant à $]0,1[$ quand n tend vers l'infini.

(c) Donner une valeur approchée de l à 10^{-2} près.

(d) Démontrer que $l = e^{-\frac{1}{2}}$.

Problème

Partie A - Etude de fonctions.

Soit f la fonction à valeurs réelles définie sur $[0,1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-\ln(1-x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Etablir que, $\forall x \in [0, \frac{1}{2}], 1 \leq \frac{1}{1-x} \leq 1 + 2x$ et en déduire que

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2}], x \leq -\ln(1-x) \leq x + x^2.$$

(b) i. Etablir que, $\forall x \in [0, \frac{1}{5}], 1 \leq \frac{1}{(1-x)^2} \leq 1 + 3x$.

ii. Calculer la dérivée de $\ln(1-x) + \frac{x}{1-x}$ pour tout x de $[0,1[$.

iii. En déduire que, $\forall x \in [0, \frac{1}{5}], x^2 \leq 2\ln(1-x) + \frac{2x}{1-x} \leq x^2 + 2x^3$.

(c) Etablir par une méthode analogue que, $\forall x \in [0,1[, -\ln(1-x) \leq \frac{x}{\sqrt{1-x}}$.

2. (a) Montrer que f est continue sur $[0,1[$. Que vaut $\lim_{x \to 1^-} f(x)$?

(b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0,1[$ et donner un encadrement de $f'(x)$ sur $]0, \frac{1}{5}]$. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $[0,1]$? Que vaut $\lim_{x \to 1^-} f'(x)$?

(c) Dessiner le graphe de f.

3. Pour tout réel x de $[0,1[$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

(a) Etudier les variations de F sur $[0,1[$.

(b) Pour tout réel x de $[0,1[$, calculer $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$. En déduire que $\lim_{x \to 1^-} F(x)$ existe et est un réel $l \leq 2$.

Partie B - Sommation de séries.

On considère les fonctions polynômes suivantes de degré l'entier naturel non nul N, définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{x^k}{k^2} \qquad Q_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{x^k}{k} \qquad R_N(x) = \sum_{k=1}^{N} x^k.$$

1. Montrer que, pour tout x de $[0,1[$, $\lim_{N \to +\infty} R_N(x) = \frac{x}{1-x}$.

2. (a) Démontrer que, pour tout x de $[0,1[$, $Q'_N(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{x^N}{1-x}$.

(b) En déduire que, pour tout x de $[0,1[$, $|Q_N(x) + \ln(1-x)| \leq \frac{x^{N+1}}{1-x}$.

(c) Montrer que, pour tout x de $[0,1[$, $\lim_{N\to+\infty} Q_N(x) = -\ln(1-x)$.

3. (a) Montrer que, pour tout x de $]0,1[$, $|P'_N(x) - \frac{\ln(1-x)}{x}| \leq \frac{x^N}{1-x}$. Que vaut $P'_N(0)$?

(b) Montrer que, pour tout x de $[0,1[$, $|P'_N(x) - f(x)| \leq \frac{x^N}{1-x}$ (où f est la fonction définie dans la partie A).

(c) En déduire que, pour tout x de $[0,1[$, $|P_N(x) - F(x)| \leq \frac{x^{N+1}}{1-x}$ (où F est la fonction définie en A.3.).

(d) En déduire enfin que, pour tout x de $[0,1[$, $\lim_{N\to+\infty} P_N(x) = F(x)$.

Partie C - Etude d'un jeu de dés.

Après une mise initiale de m ($m \in \mathbb{R}$), on lance un dé équilibré et on le relance jusqu'à obtenir un six. S'il faut k lancers ($k \in \mathbb{N}^*$), on gagne alors $\frac{1}{k}$.

On note N la variable aléatoire "nombre de lancers nécessaires pour obtenir un six" qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ en faisant la convention que N prend la valeur 0 si l'on n'obtient jamais de six. On note G la variable aléatoire "gain final" (compte tenu de la mise).

1. (a) Calculer $P(N = k)$ pour tout entier naturel non nul k, puis $\sum_{k=1}^{+\infty} P(N = k)$.

(b) En déduire $P(N = 0)$ et l'interpréter.

2. Calculer l'espérance et la variance de N.

3. (a) Décrire l'ensemble des valeurs de G, puis donner la loi de G.

(b) Quelle valeur m_0 faut-il donner à la mise m pour que le jeu soit équilibré (c'est-à-dire que l'espérance de G soit nulle) ? On suppose que $m = m_0$ dans la suite.

(c) En combien de lancers au plus faut-il obtenir six pour avoir un gain final strictement positif ?

4. Exprimer à l'aide de ln6 et de la fonction F de la partie A, l'écart-type σ de G.

5. (a) Justifier les inégalités :

$$\sum_{k=0}^{9} f(\frac{k}{12}) < 12F(\frac{5}{6}) < \sum_{k=1}^{10} f(\frac{k}{12}).$$

(b) Ecrire un programme en PASCAL permettant de calculer, pour tout entier $n \leq 10$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{12})$.

(c) Calculer s_9 et s_{10}.

(d) En déduire un encadrement de $F(\frac{5}{6})$ puis de σ.